Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Ciência da Computação
Laboratório de Linguagem de Programação

Função Delimitadora

por

Cristiano Bigonha Tibiriçá

RT 001/99

Caixa Postal, 702
30.161-970 – Belo Horizonte – MG

2 janeiro de 1999

Resumo

Neste trabalho será apresentada uma técnica para expressar funções definidas por intervalos via uma única expressão analítica, válida em todo o intervalo.

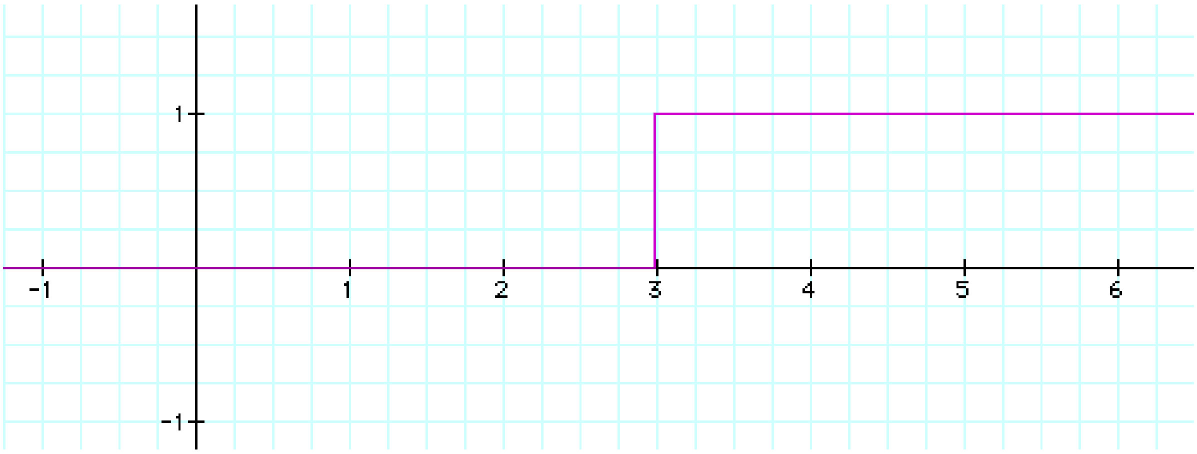
Abstract

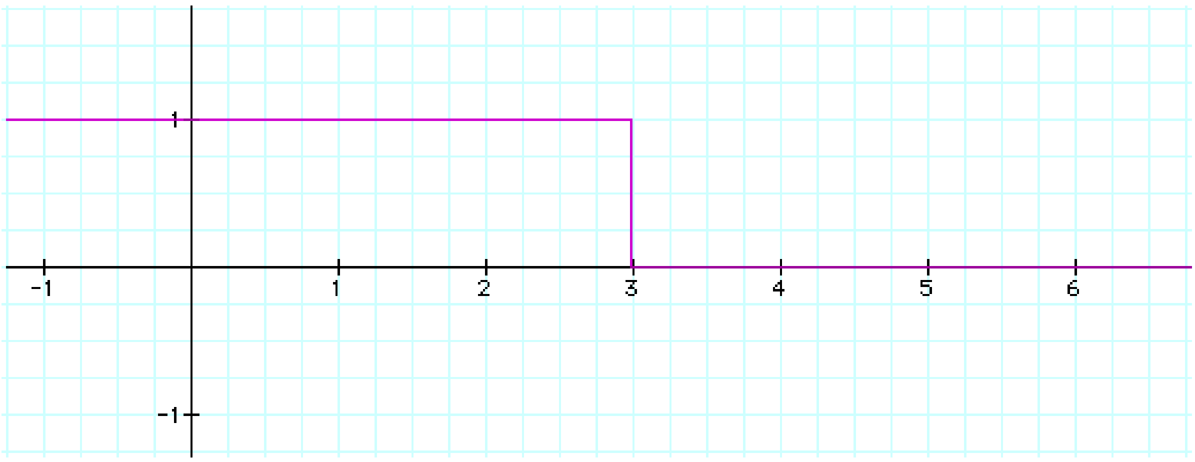
In this work a technique will be presented to express functions defined by intervals through an only analytic expression, valid in whole interval.

Sumário

1 Introdução

Função Delimitadora é a função cuja imagem será somente igual a 1 e a 0. Determinando um ponto no eixo-X (ponto delimitador) a imagem será igual a **0,** à sua esquerda e igual a **1,** à sua direita; o oposto também é possível. Ex:





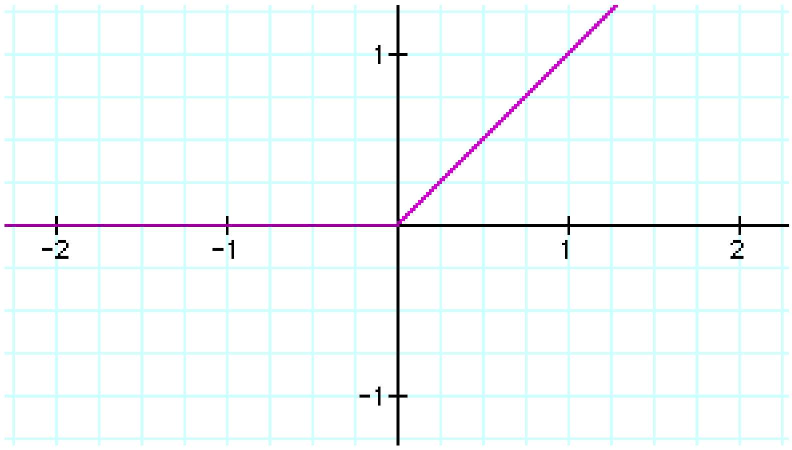
O gráfico da função delimitadora sempre será deste tipo. No exemplo anterior, o ponto delimitador foi o 3 mas poderia ser qualquer outro ponto no eixo-X. O método para se obter a função delimitadora é o seguinte :

$$f_D(x) = \frac{1 \pm \dfrac{x-D}{|x-D|}}{2} \text{ para } x \neq D.$$

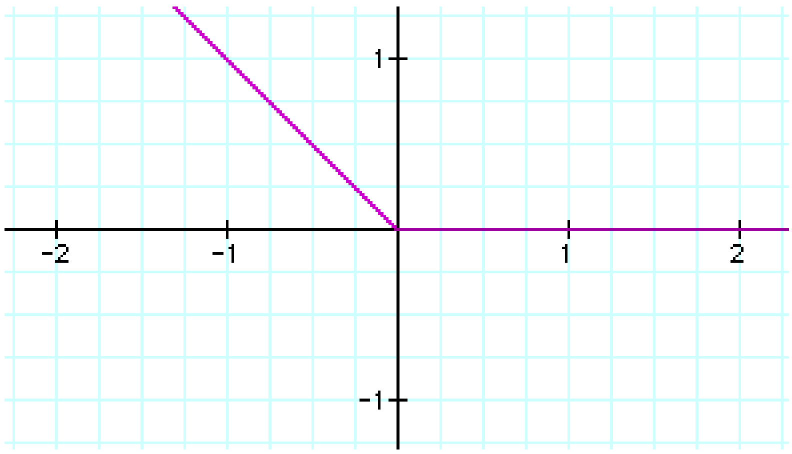
Nesta função, o ponto delimitador é indicado por **D** e o sinal ($\pm$) precedendo a divisão $\frac{x-D}{|x-D|}$ indica se a imagem igual a 0 será à esquerda ou à direita do ponto delimitador. Se for positivo será à esquerda, se for negativo será à direita.

2 Uso da função Delimitadora

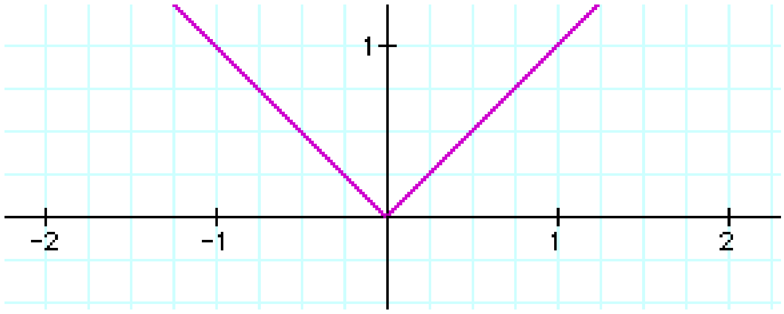
Seja agora o seguinte exemplo: uma função f(x) definida por **f(x)= x.m**, em que **m**, é variável que tem valor 1 se x>0 e valor 0 se x<0. Então, toda vez que **x** for menor que **0**, **m** será igual a **0** e, portanto, o valor de f(x) também será igual a **0**. E toda vez que **x** for maior que **0**, **m** será igual a **1** e o valor de f(x) será igual a x; portanto, não será modificado. O gráfico será o seguinte:



Seja agora outro exemplo: uma função g(x) definida por **g(x)= -x.m** e **m**, uma variável que tem valor 0 se x>0 e valor 1 se x<0. Então, toda vez que **x** for maior que **0**, **m** será igual a **0** e, portanto, o valor de g(x) também será igual a **0**. E, toda vez que **x** for menor que **0**, **m** será igual a **1** e o valor de g(x) será igual a -x; portanto, não será modificado. O gráfico será o seguinte:



Seja agora h(x) uma função assim definida: h(x) = f(x) + g(x). Com esta função é possível unir as funções **x** e **-x** em uma só. Usar esta função seria a mesma coisa que dizer que quando x for maior do que 0 a função será h(x)=x e que quando x for menor do que 0 a função será h(x)=-x. O resultado do gráfico será o seguinte:



Do exposto, pode-se perceber que trocando a variável **m** pela função delimitadora, consegue-se obter o mesmo resultado. Nos exemplos citados o ponto delimitador D é igual a 0.

$$f_D(x) = (x)\left(\frac{1+\dfrac{x-D}{|x-D|}}{2}\right) \qquad \text{(A) para } x \neq D$$

$$g_D(x) = (-x)\left(\frac{1-\dfrac{x-D}{|x-D|}}{2}\right) \qquad \text{(B) para } x \neq D$$

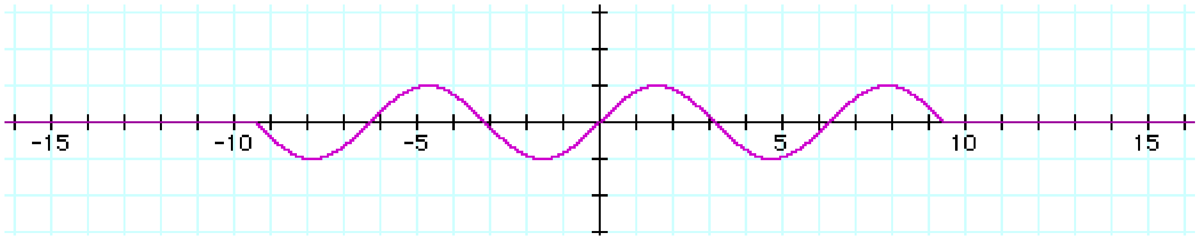
$$h_D(x) = (x)\left(\frac{1+\dfrac{x-D}{|x-D|}}{2}\right) + (-x)\left(\frac{1-\dfrac{x-D}{|x-D|}}{2}\right) \qquad \text{(C) para } x \neq D$$

Consequentemente, o uso da função delimitadora permite definir intervalos de "funcionamento" de várias funções e assim "colá-las" numa única expressão. Portanto, a força da função delimitadora está no fato de ela conseguir fundir várias funções diferentes, sob diferentes intervalos, em uma única expressão. Assim o que está em (C) é o mesmo que se escrever:

$$h(x) = \begin{cases} x, \text{se} x > 0 \\ -x, \text{se} x < 0 \end{cases}$$

A seguir, mostram-se exemplos de funções construídas usando a função delimitadora:

Exemplo 1:



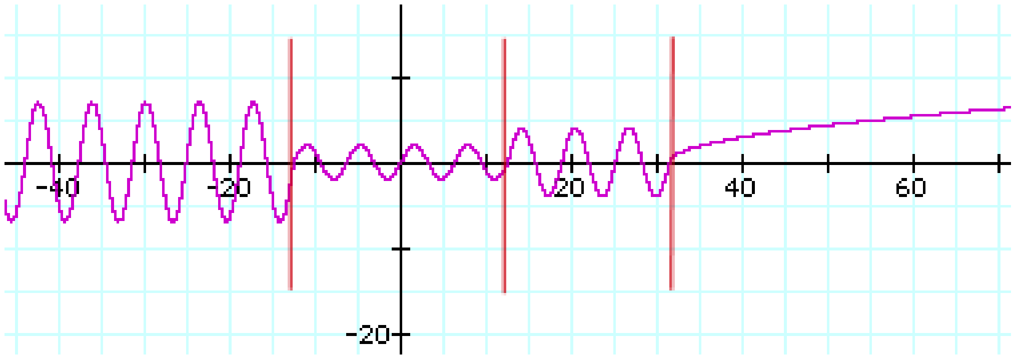
Este gráfico é da função "sen x" restrito ao intervalo de -3π a 3π, sendo os valores fora desse intervalo iguais a 0.

$$y = \begin{cases} \operatorname{sen} x, \text{se} -3\pi < x < 3\pi \\ 0, \text{se } x < -3\pi \\ 0, \text{se } x > 3\pi \end{cases}$$

Ou, alternativamente, usando-se a função delimitadora tem-se:

$$y = (\operatorname{sen} x)\left(\frac{1-\frac{x-3\pi}{|x-3\pi|}}{2}\right)\left(\frac{1+\frac{x+3\pi}{|x+3\pi|}}{2}\right) \text{ para } x \neq \{-3\pi,3\pi\}$$

Exemplo 2:



Neste gráfico existem 4 tipos de funções: (7senx), (2senx), (4senx) e $\sqrt{(x-10\pi)}$. A seguir apresenta-se este exemplo na forma convencional e desenvolvido com a função delimitadora.

Forma convencional:

$$y = \begin{cases} 7\operatorname{sen}x, \text{se } x < -4\pi \\ 2\operatorname{sen}x, \text{se } -4\pi < x < 4\pi \\ 4\operatorname{sen}x, \text{se } 4\pi < x < 10\pi \\ \sqrt{(x-10\pi)}, \text{se } x > 10\pi \end{cases}$$

Com a função delimitadora:

$$y = (2\operatorname{sen}x)\left(\frac{1-\frac{x-4\pi}{|x-4\pi|}}{2}\right)\left(\frac{1+\frac{x+4\pi}{|x+4\pi|}}{2}\right) + (4\operatorname{sen}x)\left(\frac{1+\frac{x-4\pi}{|x-4\pi|}}{2}\right)\left(\frac{1-\frac{x-10\pi}{|x-10\pi|}}{2}\right) +$$

$$+ (7\operatorname{sen}x)\left(\frac{1-\frac{x+4\pi}{|x+4\pi|}}{2}\right) + \sqrt{(x-10\pi)}\left(\frac{1+\frac{x-10\pi}{|x-10\pi|}}{2}\right)^{*} \quad \text{,para } x \neq \{-4\pi, 4\pi, 10\pi\}.$$

* Ver Observação (pág. 14).

3 Método da Função Delimitadora

Para construir uma função delimitadora em D, é preciso gerar uma expressão que dê um resultado constante, quando x for maior do que D, e um outro resultado também constante, quando x for menor do que D (no caso seria 1 e 0). Então, uma constância ocorre. Uma quando x for maior do que D e outra quando x for menor do que D.

Subtraindo D de x (x-D) obtém-se essa constância, só que, somente no sinal. Quando x for maior do que D o resultado é positivo e quando x for menor do que D o resultado é negativo. Mas o que se precisa é uma constância numérica e não uma constância em sinal. Ao dividir o resultado de (x-D) por um número positivo não se influencia em nada a constância do sinal. Então ao se dividir (x-D) pelo seu módulo, também não se influencia em nada a constância do sinal, mas agora tem-se constância numérica, pois um número dividido pelo seu módulo é igual a ±1 (+1 se o número for positivo, e -1 se o número for negativo), e como (x-D) é positivo se $x>D$, e negativo, se $x<D$, tem-se resultado +1 se $x>D$ e -1 se $x<D$. Como $1 \neq -1$ tem-se constância numérica. A expressão é a seguinte: $\frac{x-D}{|x-D|}$

Só que para a função delimitadora necessita-se de resultados iguais a 0 e a 1, e não a 1 e -1. Somando-se 1 ao resultado de $\frac{x-D}{|x-D|}$ obtém-se ou 0 (quando o resultado de $\frac{x-D}{|x-D|}$ der -1) ou 2 (quando o resultado de $\frac{x-D}{|x-D|}$ der 1). Mas 0 e 2 ainda não satisfazem, pois os resultados que interessam são 0 e 1. Por outro lado, sabe-se que 0 dividido por qualquer número (a não ser o próprio 0) é igual a 0, e que 2 dividido por 2 é igual a 1. Então, se depois de se somar 1 à $\frac{x-D}{|x-D|}$ dividir-se tudo por 2, o resultado será igual a 0 ou 1. A expressão assim construída é a seguinte:

$\dfrac{1+\frac{x-D}{|x-D|}}{2}$ que obtém o valor 1 para $x>D$ e 0 para $x<D$. Quando $\frac{x-D}{|x-D|}$ der 1, tem-se 1+1 dividido por 2, o que resulta em 1, e quando $\frac{x-D}{|x-D|}$ for -1 tem-se 1 + (-1) dividido por 2 o que resulta em 0. Se se quiser resultado 1 para $x<D$, e resultado 0 para $x>D$, trocando o sinal de $\frac{x-D}{|x-D|}$ de positivo para negativo, tal resultado será obtido, pois tem-se:. $\dfrac{1-\frac{x-D}{|x-D|}}{2}$

Quando $\frac{x-D}{|x-D|}$ der –1, tem-se 1 - (-1) dividido por 2 o que resulta em 1, e quando $\frac{x-D}{|x-D|}$

der 1 tem-se 1 - 1 dividido por 2, que é igual a 0. A partir do exposto, pode-se escrever a expressão geral da função delimitadora: $\dfrac{1 \pm \dfrac{x-D}{|x-D|}}{2}$ para x ≠ D.

4 Indeterminação no ponto Delimitador

Usando o método acima para obter a função delimitadora, nem sempre obtém-se resultados iguais a 0 e a 1. Quando o X da função delimitadora for igual ao ponto delimitador tem-se um resultado indefinido. Ou seja, se X=D;

$m = \dfrac{1 \pm \dfrac{x-D}{|x-D|}}{2}$ $\quad m = \dfrac{1 \pm \dfrac{0}{|0|}}{2}$ (zero dividido por zero é um valor indefinido).

Portanto, se X=D a função delimitadora é indefinida. Levando-se em conta isso, a função delimitadora só pode ser aplicada desconsiderando-se a imagem do ponto delimitador.

Em resumo, a imagem da função delimitadora é composta de dois intervalos: a parte 0 e a parte 1, sendo ambos abertos no ponto delimitador.

5 Algoritmo

A seguir será mostrado o algoritmo para a construção de uma função utilizando a Função Delimitadora (FD).

Antes de mostrar o algoritmo é importante lembrar de pontos básicos da FD:

- a função delimitadora tem como imagem dois valores constantes, o zero e o um. O ponto de encontro desses dois valores é chamado de ponto delimitador.

- a expressão geral da FD é $f_D(x) = \dfrac{1 \pm \dfrac{x-D}{|x-D|}}{2}$, onde D representa o ponto delimitador.

- os sinais $\pm$ definem se a imagem zero (ou um se preferir) da FD será à esquerda, ou à direita do ponto delimitador. Se o sinal for positivo, o zero será à esquerda; se for negativo, o zero será à direita.

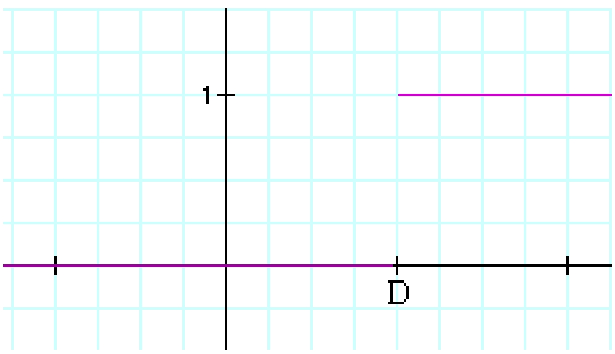
- a forma final de uma FD é usada sempre como multiplicadora de outra função, justamente para delimitar a imagem desta função.

- a imagem da FD é indefinida quando X=D. Portanto, deve-se desconsiderar a imagem nesse ponto.

Para a construção de funções a partir de FD também é importante saber as formas básicas dela. São quatro as principais:

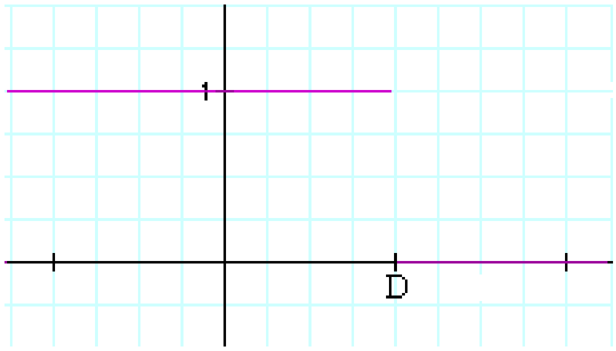
• Zero à esquerda do ponto delimitador:

$f_D(x) = \left(\dfrac{1 + \dfrac{x-D}{|x-D|}}{2} \right)$, ponto delimitador igual a D.



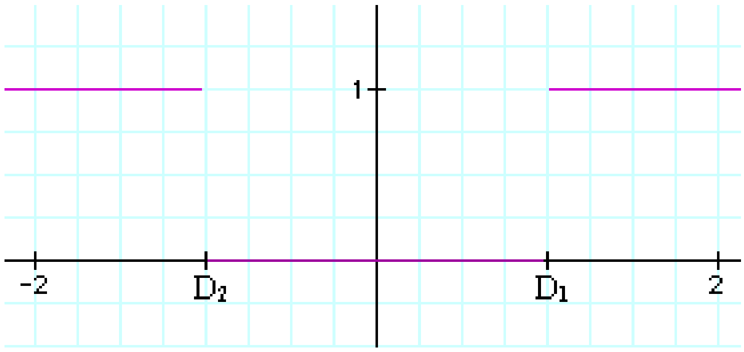
• Zero à direita do ponto delimitador.

$$f_D(x) = \left(\frac{1 - \frac{x-D}{|x-D|}}{2} \right)$$, ponto delimitador igual a D:



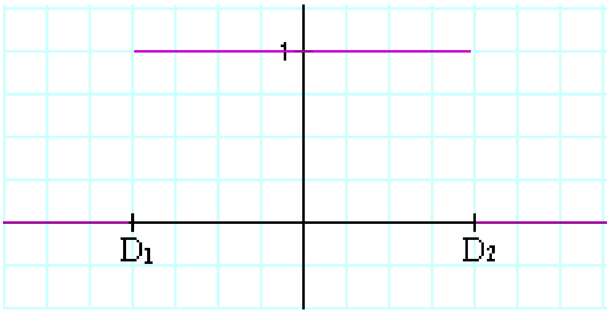
•Zero entre dois pontos delimitadores:

$$f_{D_2}^{D_1}(x) = \left(\frac{1 + \frac{x - D_1}{|x - D_1|}}{2} \right) + \left(\frac{1 - \frac{x - D_2}{|x - D_2|}}{2} \right)$$, pontos delimitadores iguais a D_1 e D_2.



•Zero exterior a dois pontos delimitadores:

$$f_{D_2}^{D_1}(x) = \left(\frac{1 + \frac{x - D_1}{|x - D_1|}}{2} \right) \left(\frac{1 - \frac{x - D_2}{|x - D_2|}}{2} \right)$$, pontos delimitadores iguais a D_1 e D_2.



A partir dessas 4 formas da função delimitadora, pode-se construir os mais variados gráficos. Além disso, percebe-se que a terceira e quarta forma nada mais são do que a soma e o produto da primeira forma com a segunda forma respectivamente.

Para facilitar o trabalho da FD com suas formas principais é conveniente o uso de nomes para elas. Assim pode-se chamar a primeira forma de α_D, onde D é o ponto delimitador, e a segunda de β_D, onde D é o ponto delimitador. A terceira e quarta forma, sendo a soma e o produto das duas primeiras formas, podem ser representadas por $\alpha_{D1}+\beta_{D2}$ (soma) para a terceira forma e $\alpha_{D1}\cdot\beta_{D2}$ (produto) para a quarta forma.

A construção de uma função através da FD é constituída de cinco passos:

• Primeiro passo:

Definem-se as funções que irão ser delimitadas.

• Segundo passo:

Define(m)-se o(s) ponto(s) delimitadore(s) de cada função.

• Terceiro passo:

Define-se a forma da FD para cada função (uma das formas mostradas acima).

• Quarto passo:

Multiplica-se a forma escolhida da FD pela sua respectiva função formando o produto da função.

• Quinto passo:

Somam-se os produtos de cada função.

6 Exemplos

1- Construir a função $f(x)=\begin{cases} x, \text{se} x>0 \\ x^2, \text{se} x<0 \end{cases}$ em forma de FD.

•Primeiro passo: definem-se as funções a serem delimitadas.

Neste exemplo são duas:

$b(x) = x$

$c(x) = x^2$

•Segundo passo: definem-se os pontos delimitadores de cada função.

Para b(x) o ponto delimitador é igual a 0 e para c(x) o ponto delimitador também é 0.

•Terceiro passo: define-se a forma da FD de cada função.

Em b(x) como interessa anular seus valores à esquerda de seu ponto delimitador, a sua FD será a que tem zero à esquerda do ponto delimitador, portanto α_0.

Em c(x) como interessa anular seus valores à direita de seu ponto delimitador, a sua FD será a que tem zero à direita do ponto delimitador, portanto β_0.

•Quarto passo: multiplicação da FD pela sua respectiva função.

Para b(x) tem-se a forma α_0, pois o ponto delimitador é igual a zero, portanto o produto de b(x) por α_0 será o seguinte:

$b(x) \bullet \alpha_0 = x\alpha_0$

Para c(x) tem-se a forma β_0, pois o ponto delimitador é igual a zero, portanto o produto de b(x) por β_0 será o seguinte:

$c(x) \bullet \beta_0 = x^2 \bullet \beta_0$

• Quinto passo: somam-se os produtos de cada função obtendo-se então f(x).

$f(x) = x \bullet \alpha_0 + x^2 \bullet \beta_0$

na forma numérica:

$$f(x) = x\left(\frac{1 + \dfrac{x-0}{|x-0|}}{2}\right) + x^2\left(\frac{1 - \dfrac{x-0}{|x-0|}}{2}\right)$$

2 - Construir a função $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}x, \text{ se } x < -2\pi \text{ ou se } x > 2\pi \\ 3\operatorname{sen}x, \text{ se } -2\pi < x < 2\pi \end{cases}$ em forma de FD.

•Primeiro passo: definem-se as funções a serem delimitadas.

Neste exemplo são duas:

b(x) = sen x

c(x) = 3senx

•Segundo passo: definem-se os pontos delimitadores de cada função.

Para b(x) tem-se dois pontos delimitadores, -2π e 2π. Para c(x) tem-se também os dois pontos: -2π e 2π.

•Terceiro passo: define-se a forma da FD de cada função.

Em b(x), como se quer anular os valores no intervalo entre os dois pontos delimitadores, a sua FD será a que tem zero entre os pontos delimitadores, portanto $\alpha_{2\pi}+\beta_{-2\pi}$.

Em c(x), como se quer anular os valores no espaço exterior aos dois pontos delimitadores, a sua FD será a que tem zero exterior a dois pontos delimitadores, portanto $\alpha_{-2\pi}\bullet\beta_{2\pi}$.

•Quarto passo: multiplicação da FD pela sua respectiva função.

Para b(x) tem-se a forma $\alpha_{2\pi}+\beta_{-2\pi}$, portanto o produto de b(x) por $\alpha_{2\pi}+\beta_{-2\pi}$ será o seguinte:

$b(x) \bullet (\alpha_{2\pi}+\beta_{-2\pi}) = \operatorname{sen}x \bullet (\alpha_{2\pi}+\beta_{-2\pi})$

Para c(x) tem-se a forma $\alpha_{-2\pi}\bullet\beta_{2\pi}$, portanto o produto de c(x) por $\alpha_{-2\pi}\bullet\beta_{2\pi}$ será o seguinte:

$c(x) \bullet (\alpha_{-2\pi}\bullet\beta_{2\pi}) = 3\operatorname{sen}x \bullet (\alpha_{-2\pi}\bullet\beta_{2\pi})$

• Quinto passo: : somam-se os produtos de cada função obtendo-se, então, f(x).

$$f(x) = \text{sen}x \bullet (\alpha_{2\pi} + \beta_{-2\pi}) + 3\text{sen}x \bullet (\alpha_{-2\pi} \bullet \beta_{2\pi})$$

na forma numérica:

$$f(x) = \text{sen}x\left(\left(\frac{1+\frac{x-2\pi}{|x-2\pi|}}{2}\right)+\left(\frac{1-\frac{x+2\pi}{|x+2\pi|}}{2}\right)\right) + 3\text{sen}x\left(\left(\frac{1+\frac{x+2\pi}{|x+2\pi|}}{2}\right)\left(\frac{1-\frac{x-2\pi}{|x-2\pi|}}{2}\right)\right)$$

Uma particularidade a ser notada é que em todos os exemplos apresentados, a imagem no ponto delimitador é indefinida, sendo essa ainda uma restrição da Função Delimitadora.

7 Observação

É importante citar que este algoritmo só é válido considerando a imagem dentro do conjunto dos números imaginários. Caso seja utilizado o conjunto dos números reais (a maioria dos programas de computador o utiliza) pode ser necessário algumas transformações na aplicação da função delimitadora.

Seja este exemplo:

- Construir a função $f(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x < 0 \\ \sqrt{x} \text{ se } x > 0 \end{cases}$ em forma de FD.

Utilizando o algoritmo, obtém-se a seguinte função:

$$f(x) = \sqrt{x}\,\alpha_0$$

que só é válida no campo dos imaginários, pois quando x for negativo tem-se um número imaginário multiplicado por zero, que resulta em zero. Se a função for válida somente para o conjunto dos reais e x for menor do que zero, sua raiz quadrada será negativa e consequentemente indefinida. Para contornar esse problema, deve-se utilizar alguns artifícios que impeçam essa indeterminação no campo dos reais. Usando uma propriedade da radiciação resolve-se o problema.

$$\sqrt{x}\,\alpha_0 = \sqrt{x\left(\alpha_0\right)^2}$$

Mas como a FD tem seus valores iguais a 0 ou a 1, que elevados ao quadrado não são modificados, pode-se eliminar o expoente, que nada se alterará. Obtém-se, então, a seguinte função:

$$f(x)=\sqrt{x\,\alpha_0}$$

Colocando-se a FD dentro da raiz, ela impedirá que o radicando torne-se negativo e consequentemente indeterminando a função para x<0.

Para logaritmo procede-se da mesma forma:

- Construir a função $f(x)=\begin{cases} 0, & \text{se } x<0 \\ \log x, & \text{se } x>0 \end{cases}$ em forma de FD.

Seguindo o algoritmo obtém-se:

$$f(x)=(\log x)\,\alpha_0$$

No campo dos imaginários ela está correta. Já no dos reais ela apresenta uma indefinição para x<0. Utilizando uma propriedade dos logaritmos, contorna-se novamente esse problema.

$n\log x=\log x^n$,então:

$$(\log x)\,\alpha_0=\log x^{\alpha_0}$$

$$f(x)=\log x^{\alpha_0}$$

Com esta modificação, a função fica válida para os reais.

8 Conclusões

Neste trabalho foi apresentada uma técnica para expressar funções definidas por intervalos, via uma única expressão aritimética, válida em todo intervalo. Esta técnica pode ser utilizada em aplicação de teoria das filas e cálculos de modelos probabilísticos e representções gráficas.

9 Agradecimentos

Agradeço ao meu tio, professor Roberto da Silva Bigonha, pelas suas contribuições e a possibilidade do registro desse trabalho, ao meu, pai Antônio Cleber Gonçalves Tibiriçá e ao meu irmão Álvaro Messias Bigonha Tibiriçá, pela sua valiosas críticas que possibilitaram-me chegar a esta forma final.